

Verfahren zur ressourcenbeschränkten Projektplanung

Vorlesung vom 15.11.2005: Einführung (RCPS)

- Branch-and-Bound-Verfahren
- Zulässiger Bereich
- RCPS: B&B-Verfahren – relaxation-/tree-based approach

C.-U. Fündeling, Ch. Mellentien

**LS Prof. Dr. K. Neumann
Institut für Wirtschaftstheorie und Operations Research**

Universität Karlsruhe (TH)

Einführung

- *B&B-Verfahren*- *Zul. Bereich*- *relaxation-based approach*- *tree-based approach*

- Kombinatorische Optimierung:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \quad F(x) \\ \text{u.d.N.} \quad x \in M \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \end{array} \right\} (P)$$

→ in der Regel NP-schwer

- LP-Relaxation:

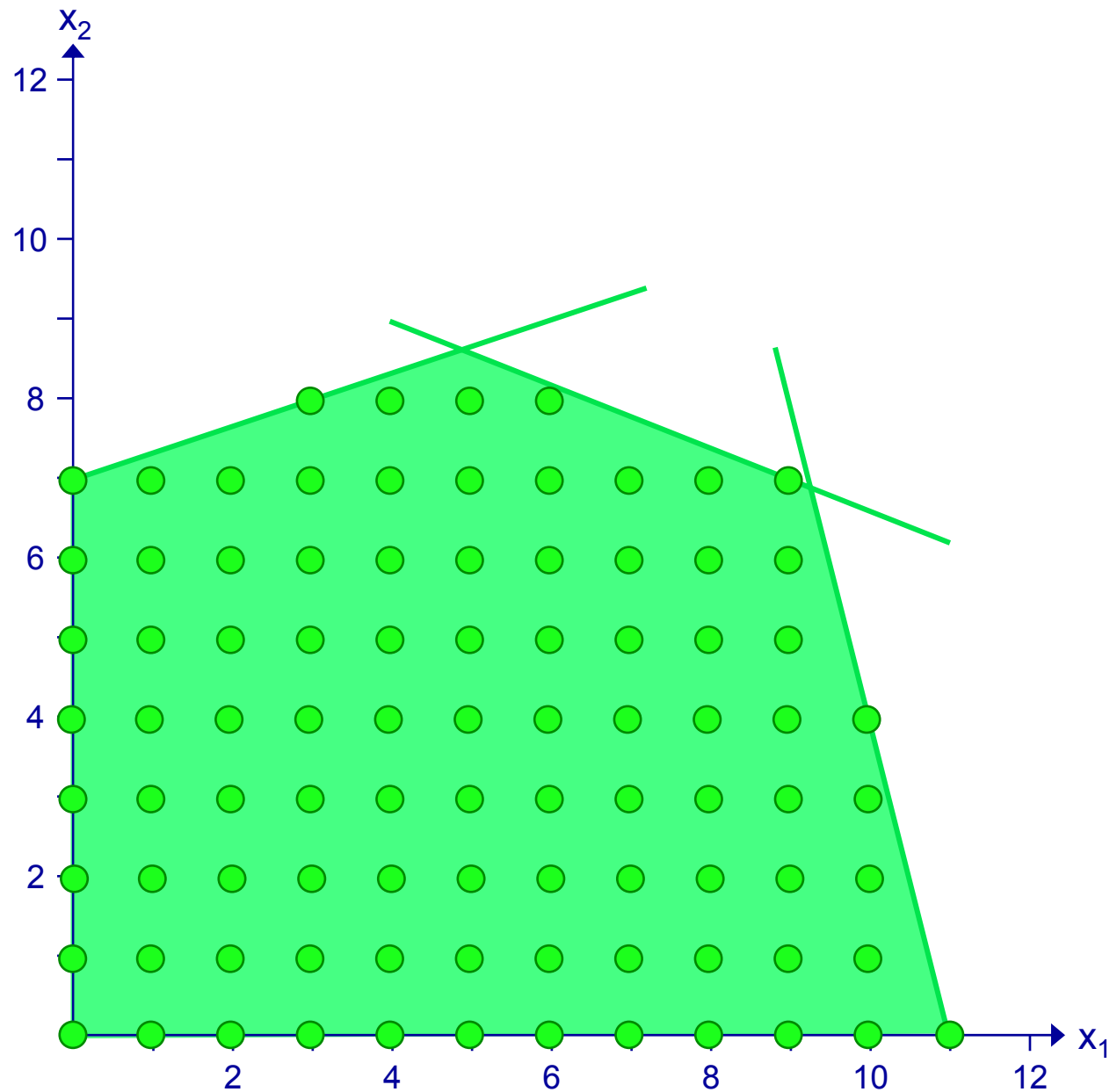
$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \quad F(x) \\ \text{u.d.N.} \quad x \in M \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n \end{array} \right\} (P')$$

→ polynomial lösbar (Simplex-Algorithmus)

→ Lösungsidee für (P): Verwende Lösung des relaxierten Problems (P') bei Lösung von (P)

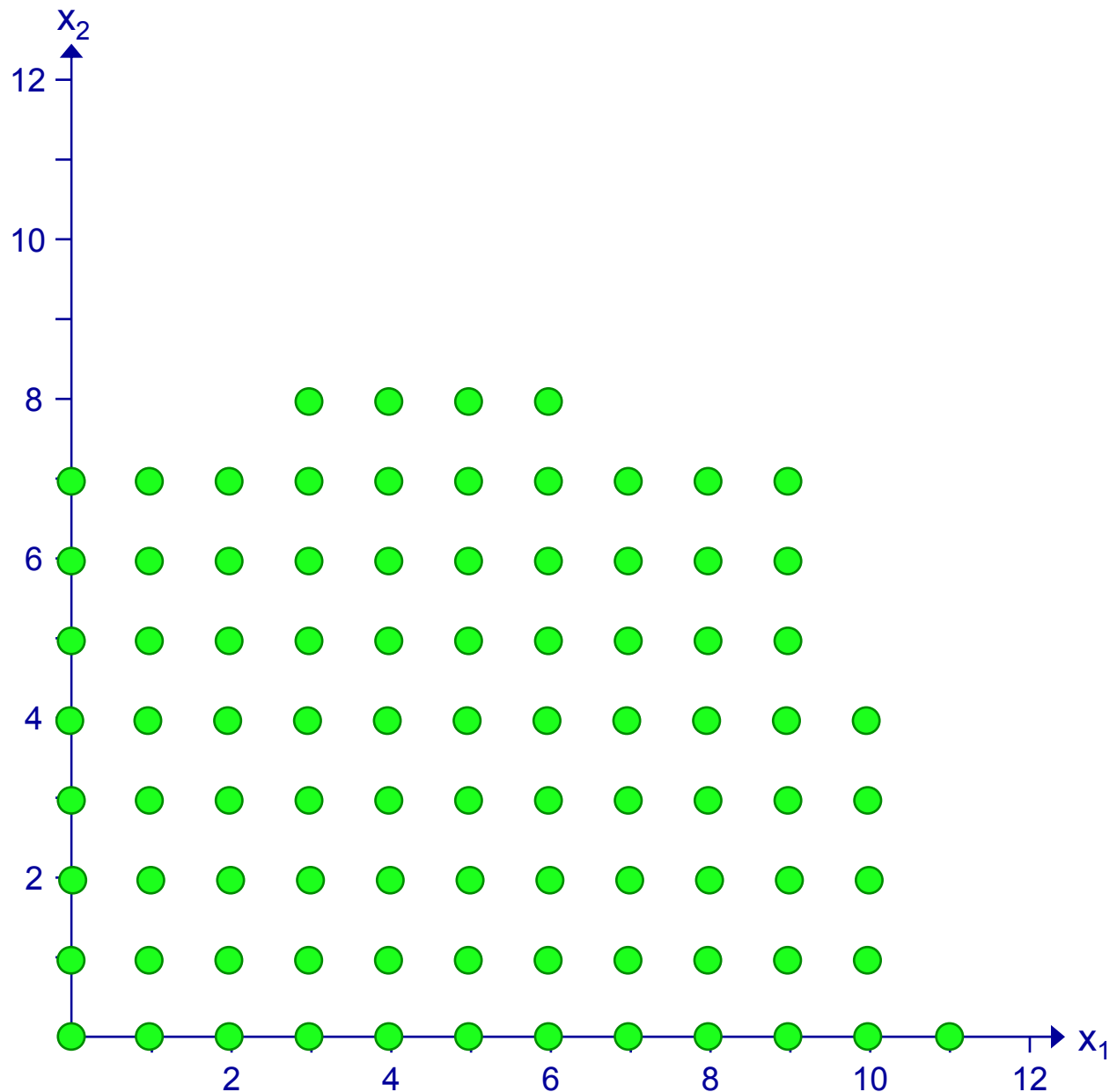
Einführung

- *B&B-Verfahren*
- *Zul. Bereich*
- *relaxation-based approach*
- *tree-based approach*



Einführung

- *B&B-Verfahren*
- *Zul. Bereich*
- *relaxation-based approach*
- *tree-based approach*



Einführung

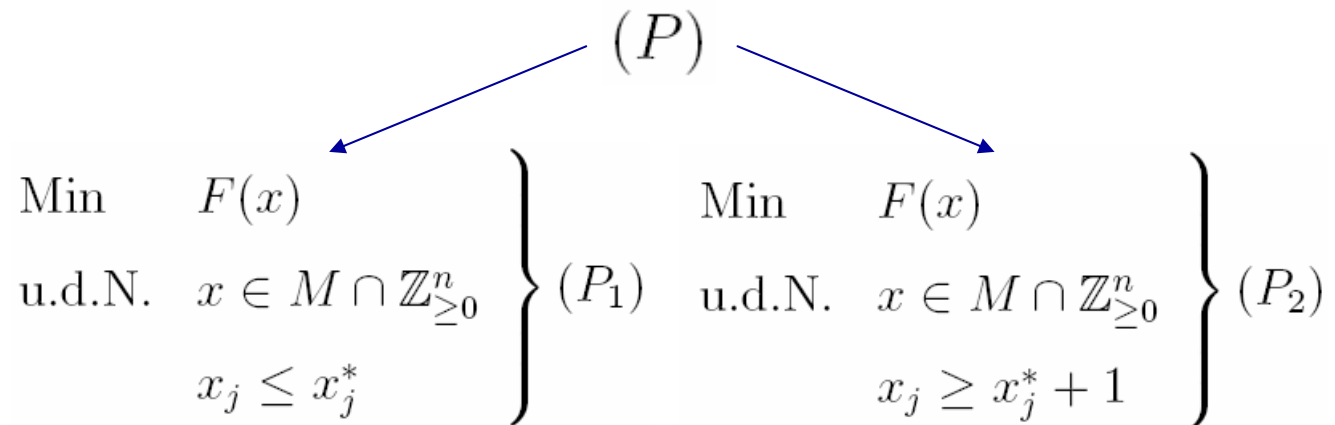
- B&B-Verfahren
- Zul. Bereich
- relaxation-based approach
- tree-based approach

- **Verfahrensablauf:**

1. Löse (P') statt $(P) \rightarrow x^+$

2. Falls $x^+ \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$:

- Zerlegung des zul. Bereichs durch Einführung zus. Nebenbedingungen \rightarrow Teilprobleme, z.B.



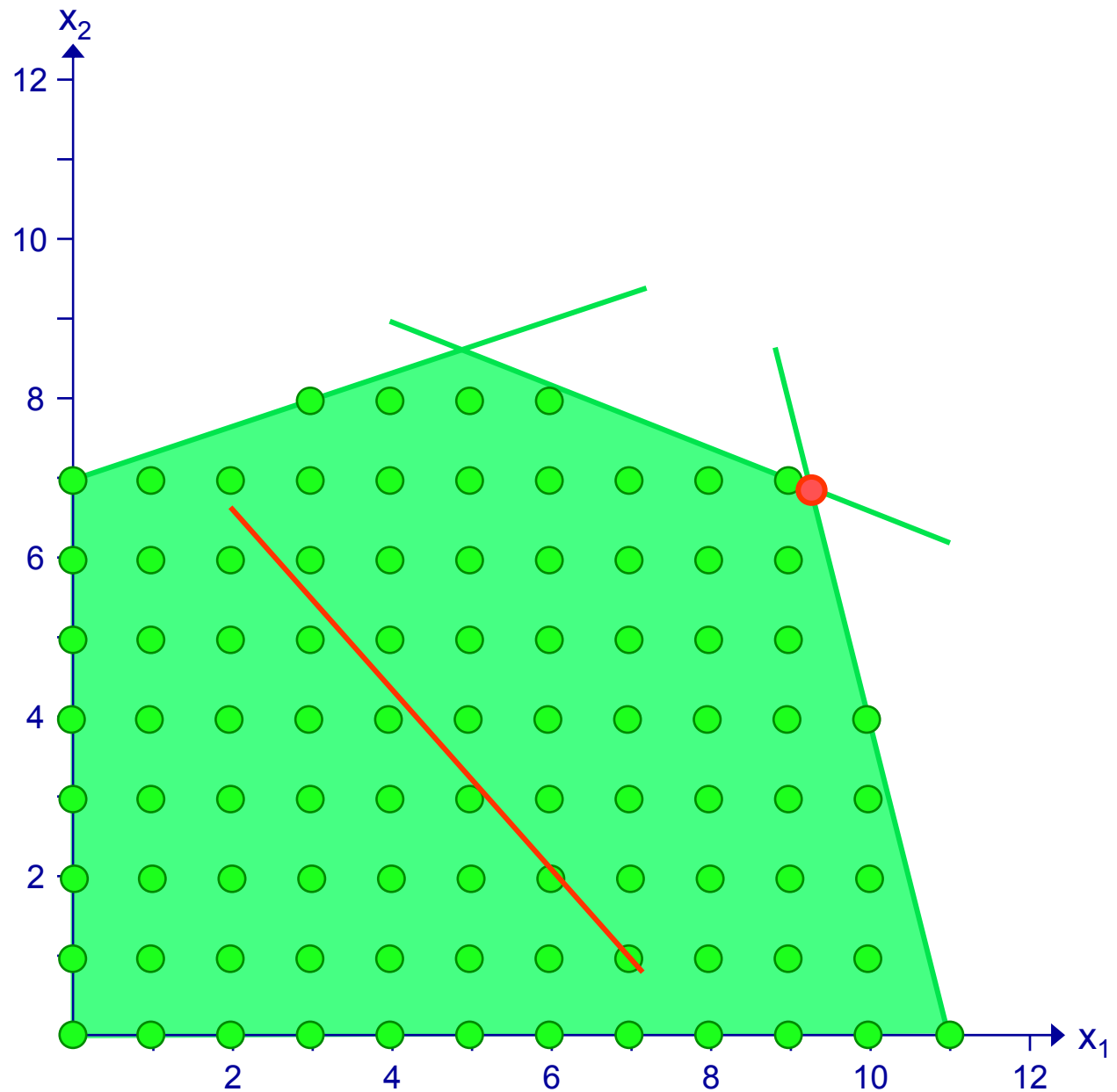
- Gehe zu 1.

Sonst: zul. Lösung gefunden

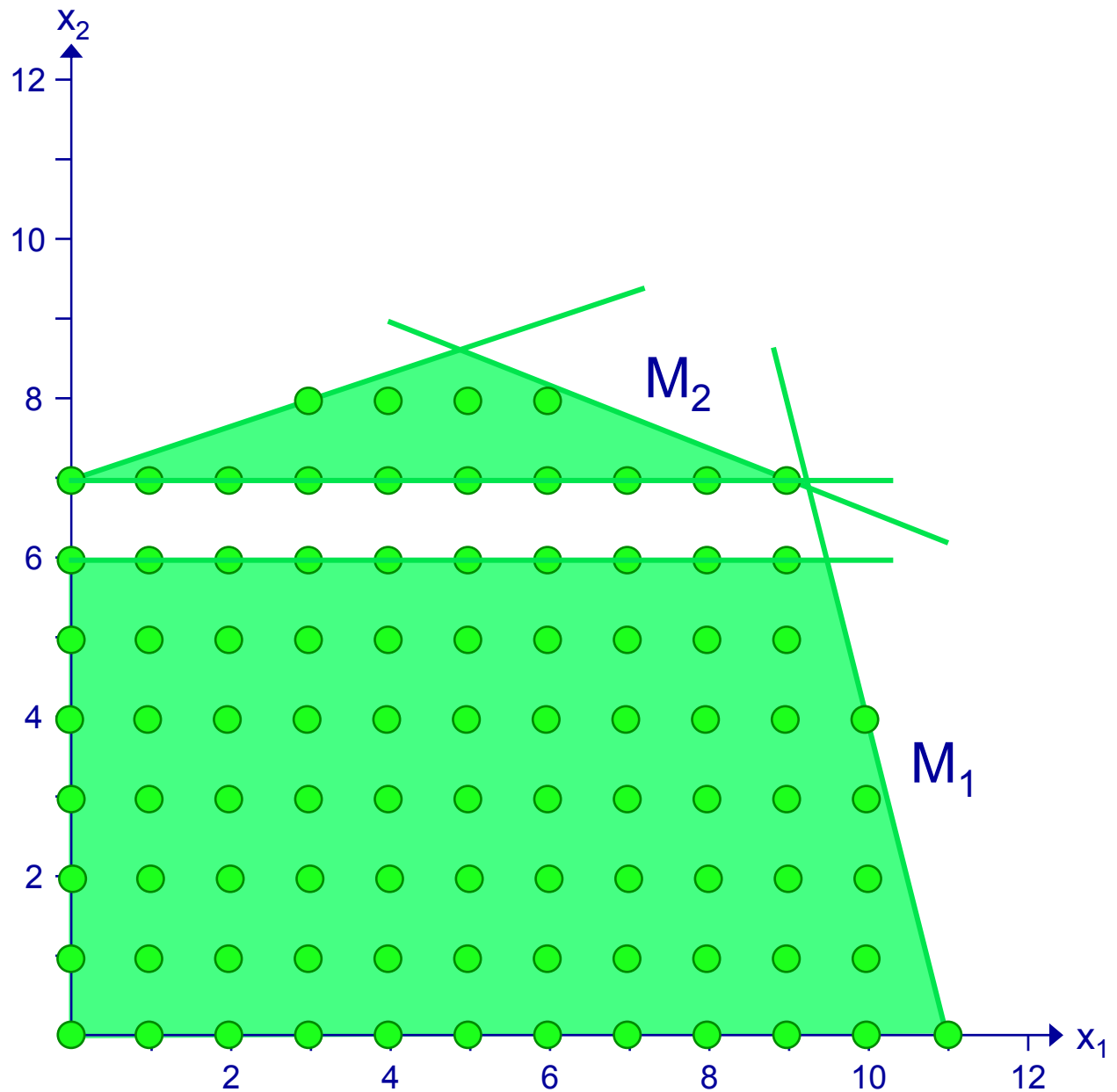
- **Branch**: Enumeriere alle Alternativen
- **Bound**: Ausloten von Teilproblemen anhand bisher bester gef. Lösung

Einführung

- *B&B-Verfahren*
- *Zul. Bereich*
- *relaxation-based approach*
- *tree-based approach*



- Einführung
- *B&B-Verfahren*
 - *Zul. Bereich*
 - *relaxation-based approach*
 - *tree-based approach*
- Fündeling, Mellentien
- 7 -



Einführung

- *B&B-Verfahren*
- *Zul. Bereich*
- *relaxation-based approach*
- *tree-based approach*

- Spezielle Ausgestaltung von B&B-Verfahren für spezielle Probleme, z.B.
 - Handlungsreisendenprobleme
 - Knotenpackungsprobleme
 - Standortplanungsprobleme
 - beliebige gemischt-ganzzahlige Probleme
 - ...
- Ausgestaltung betrifft
 - Art der **zu lösenden Relaxation** zur Bestimmung unterer Schranken
 - Wahl der **einzuführenden NB**
 - Suchstrategie (Tiefensuche, LLB, ...)
 - ggf. zusätzliche Dominanzregeln zur Auslotung weiterer Knoten

Einführung

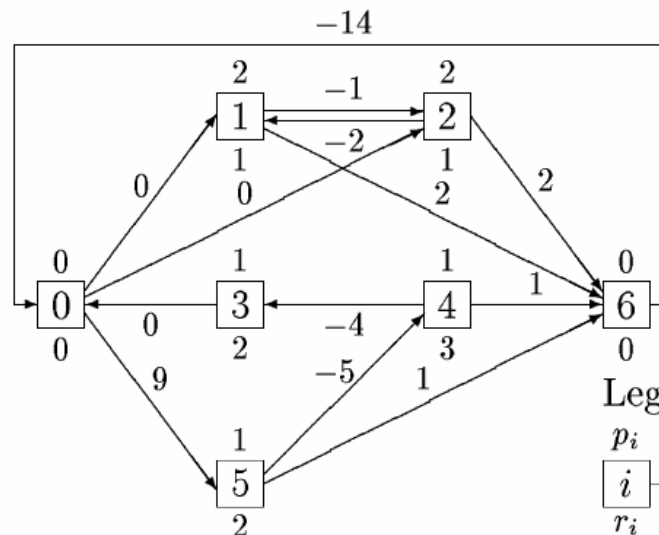
- B&B-Verfahren
- **Zul. Bereich**
- relaxation-based approach
- tree-based approach

- Wiederholung: Standardproblem

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Min.} \quad f(S) \\
 \text{u.d.N.} \quad r_k(S, t) \leq R_k \quad (k \in \mathcal{R}, 0 \leq t \leq \bar{d}) \\
 \quad \quad S_j - S_i \geq \delta_{ij} \quad (\langle i, j \rangle \in E) \\
 \quad \quad S_i \geq 0 \quad (i \in V) \\
 \quad \quad S_0 = 0
 \end{array} \right\} (PS|temp, \bar{d}|f)$$

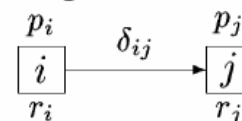
- ➔ kein ganzzahliges Optimierungsproblem!
- ➔ Frage: Warum dann B&B-Verfahren?

- Beispiel:

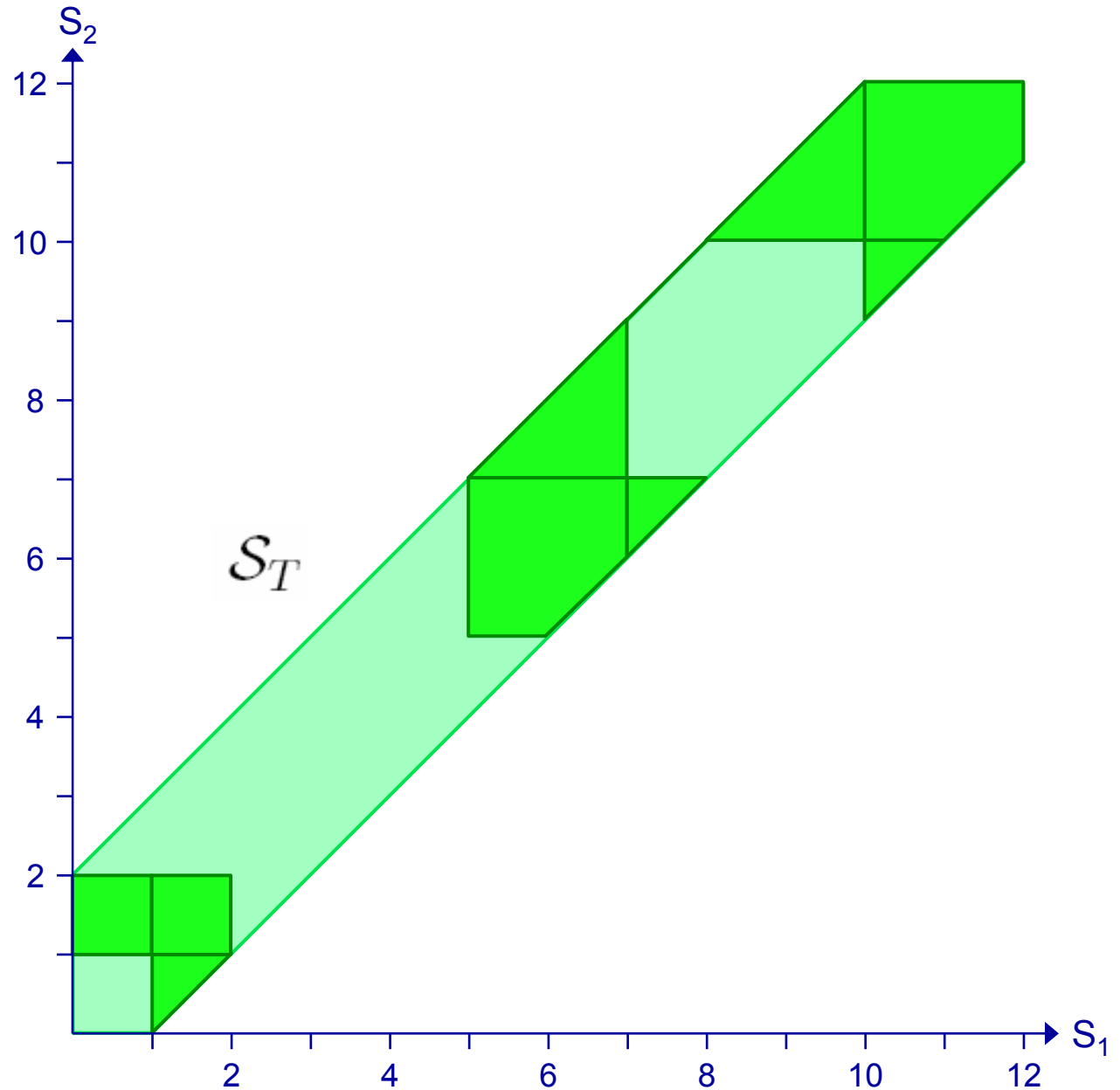


➔ Aktivitäten 0,3,4,5 sind zeitlich fixiert!

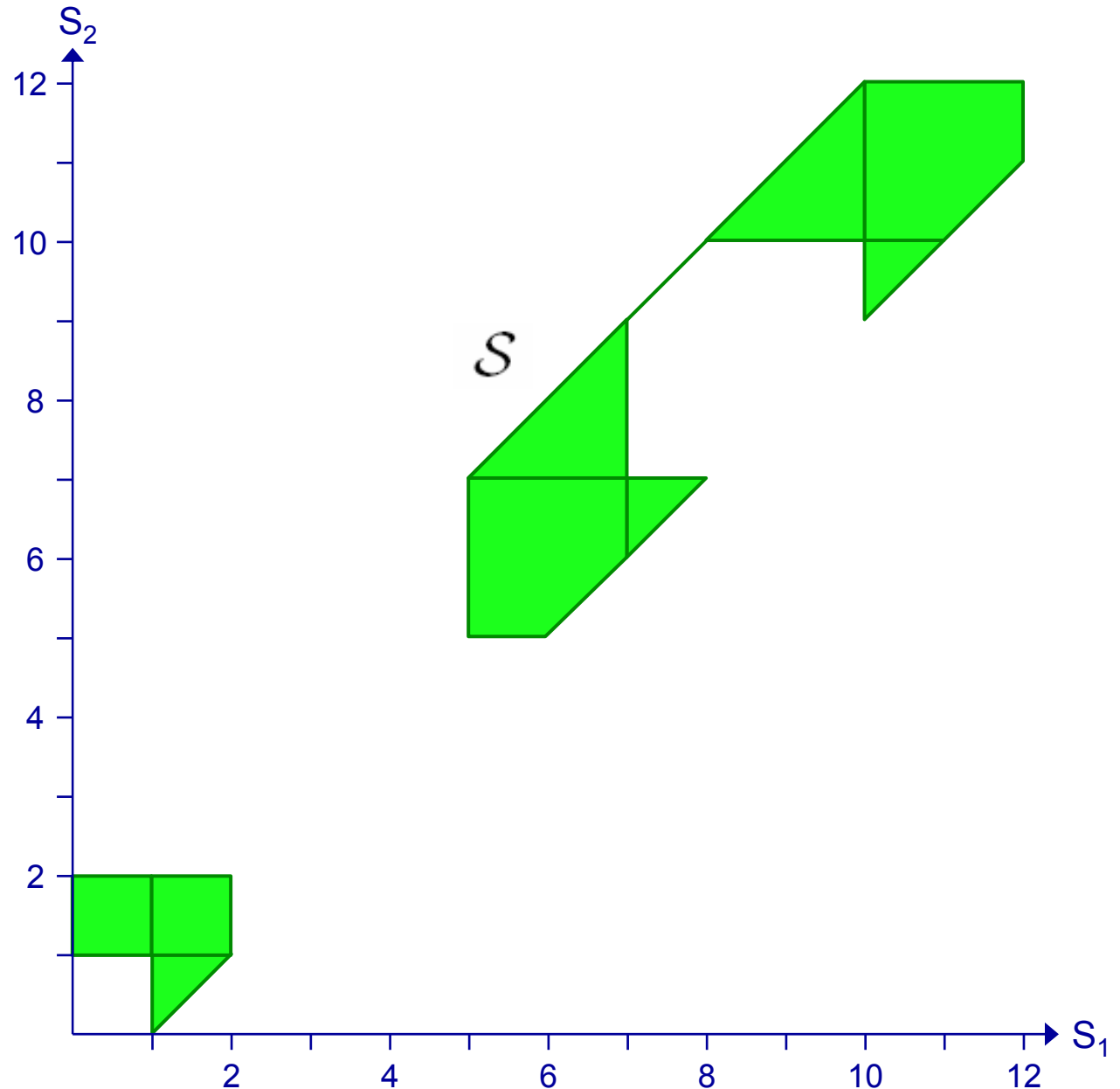
Legend:



- Einführung**
- B&B-Verfahren
 - **Zul. Bereich**
 - relaxation-based approach
 - tree-based approach



- Einführung**
- B&B-Verfahren
 - **Zul. Bereich**
 - relaxation-based approach
 - tree-based approach



Einführung

- B&B-Verfahren

- **Zul. Bereich**

- *relaxation-based approach*

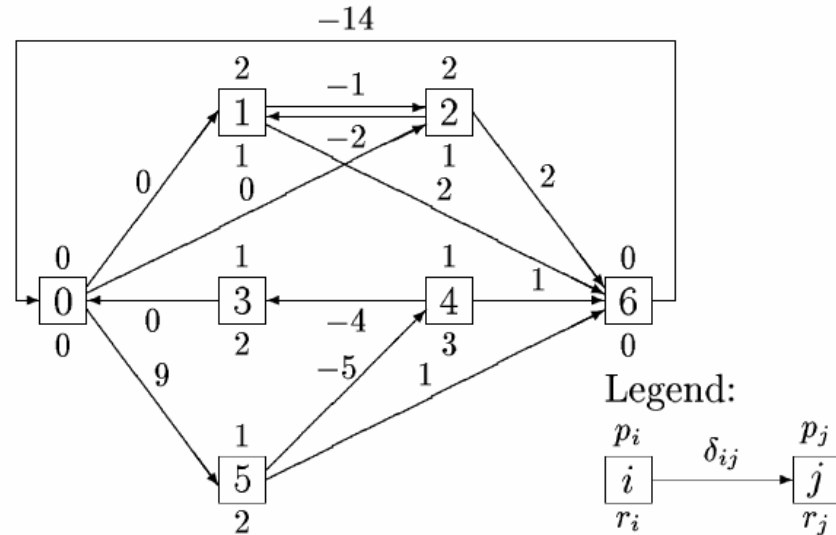
- *tree-based approach*

- Zulässiger Bereich ist
 - nicht konvex
 - nicht zusammenhängend

➔ Lösungsansatz: B&B-Verfahren
- Mengen spezieller Punkte des zulässigen Bereichs enthalten optimale Lösungen für verschiedene ZF
- Frage: Relaxation, einzuführende NB?
 - WET: Zeitplanung polynomial ➔ Ressourcenrelaxation ➔ relaxation-based approach
 - RAC: Zeitplanung NP-schwer ➔ Ressourcenrelaxation nicht sinnvoll zur Bestimmung unterer Schranken ➔ tree-based approach

- Einführung
- B&B-Verfahren
 - Zul. Bereich
 - **relaxation-based approach**
 - tree-based approach

• Beispiel:



→ ES = (0,0,0,0,4,9,10)

$r_k(S,t)$

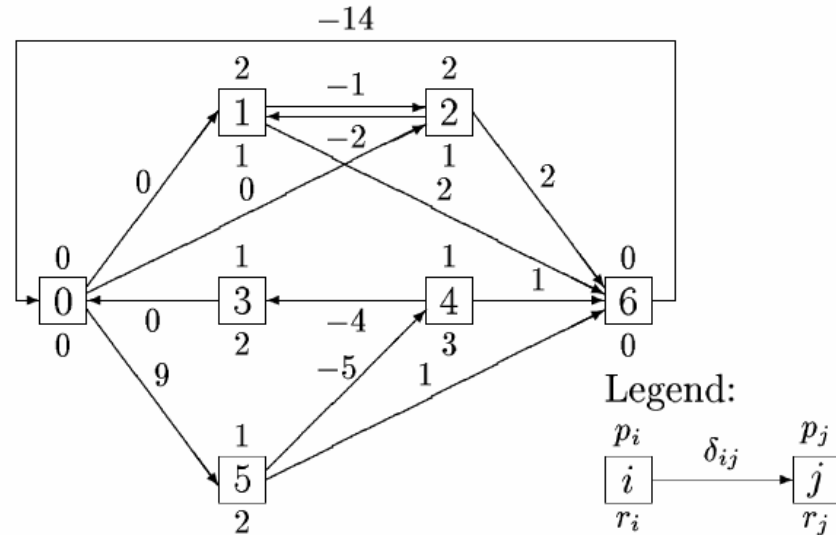
Ressourcenkonflikt!



Auflösungsalternative 1: Verschiebe 2 hinter 3

- Einführung
- B&B-Verfahren
 - Zul. Bereich
 - **relaxation-based approach**
 - tree-based approach

• Beispiel:



→ ES = (0,0,0,0,4,9,10)

$r_k(S,t)$

Ressourcenkonflikt!



Auflösungsalternative 2: Verschiebe 1 hinter 3

Einführung

- B&B-Verfahren

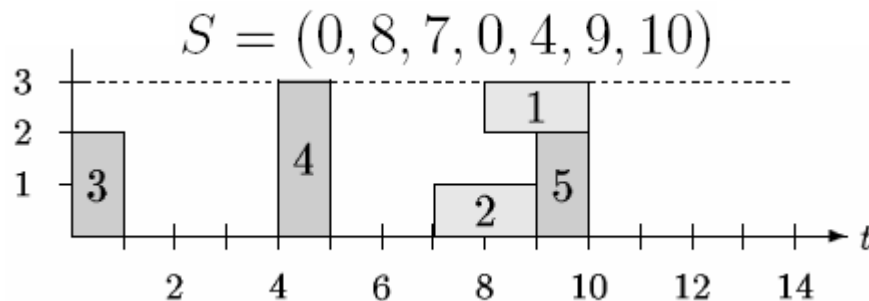
- Zul. Bereich

- *relaxation-based approach*- *tree-based approach*

- **Strict order** = Menge O von Vorgangspaaren (i, j) mit $i, j \in V$, welche
 - asymmetrisch: $\nexists i, j \in V : \{(i, j), (j, i)\} \subseteq O$
 - und transitiv: $\{(h, i), (i, j)\} \subseteq O \Rightarrow \{(h, j)\} \subseteq O$ ($h, i, j \in V$)

ist.

- **Beispiel: schedule-induced strict order**
 $O(S) := \{(i, j) \in V \times V \mid i \neq j, S_j \geq S_i + p_i\}$



$$O(S) = tr(\{(0, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (2, 5), (1, 6), (5, 6)\})$$

Einführung

- B&B-Verfahren
- Zul. Bereich
- *relaxation-based approach*
- *tree-based approach*

- Idee:
 - Löse Ressourcenrelaxation $\rightarrow S^+$
 - Falls S^+ (auch) ressourcenzulässig $\rightarrow S^+$ potentiell Optimum
 - Sonst bestimme einen Zeitpunkt t , zu dem $\mathcal{A}(S^+, t)$ verboten ist, d.h. R_k durch die Vorgänge aus $\mathcal{A}(S^+, t)$ für mindestens ein $k \in \mathcal{R}$ überschritten wird
 - Verschiebe Teilmenge von $\mathcal{A}(S^+, t)$, so dass Menge der Vorgänge nicht mehr verboten ist

Ressourcenrelaxation

Einführung zus. NB
= Ordnungselemente

Einführung

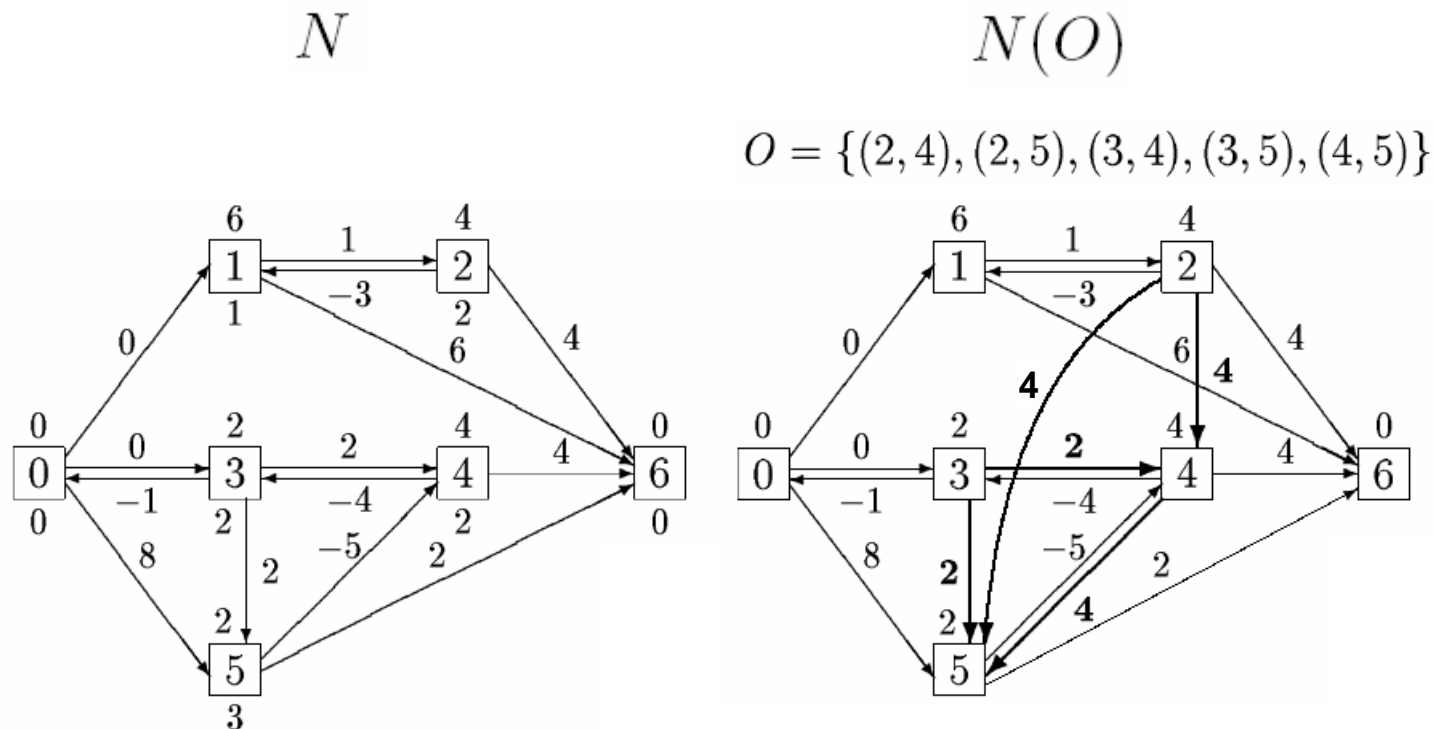
- B&B-Verfahren

- Zul. Bereich

- relaxation-based approach

- tree-based approach

- **Order network** $N(O)$ = Projektnetzwerk + Pfeil von i nach j für jedes $(i, j) \in O$ mit Bewertung p_i bzw. $\max(p_i, \delta_{ij})$, falls entsprechender Pfeil bereits vorhanden
- Beispiel:



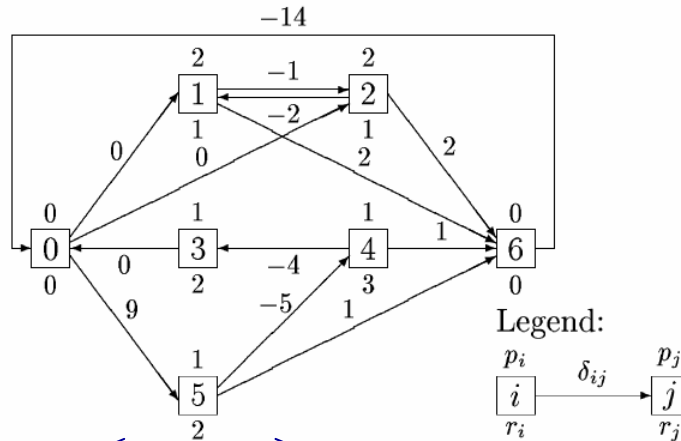
Einführung

- B&B-Verfahren
- Zul. Bereich
- **relaxation-based approach**
- tree-based approach

Fündeling, Mellentien
- 18 -

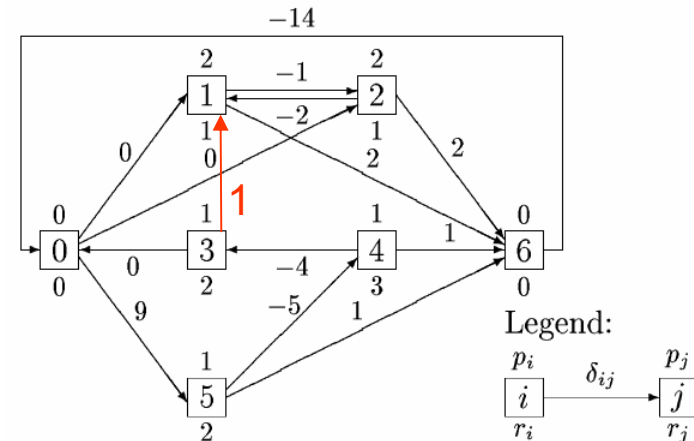
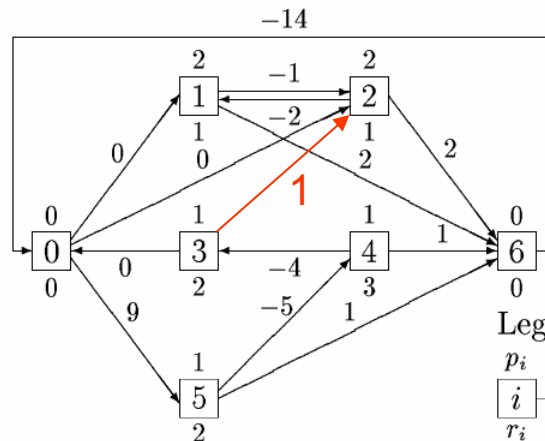
• Beispiel:

$$O = \emptyset$$



$$O_1 = \{(3, 2)\}$$

$$O_2 = \{(3, 1)\}$$



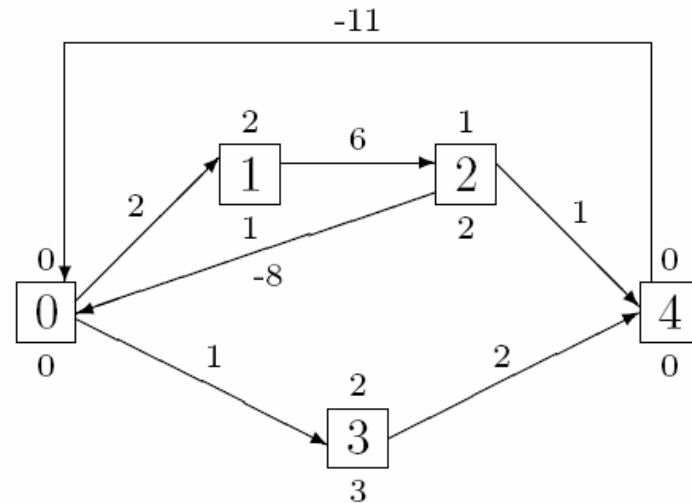
Einführung

- B&B-Verfahren
- Zul. Bereich
- *relaxation-based approach*
- *tree-based approach*

- Bestimmung von S^+ abhängig von ZF, für WET Abstiegsverfahren (konvexes Optimierungsproblem)
- Variante: Enumeriere nicht alle Ordnungen, sondern nur besonders aussichtsreiche → Truncated B&B-Verfahren
- Themen im SW-Praktikum: Eine Gruppe
 - Implementierung eines (truncated) B&B-Verfahrens basierend auf dem relaxation-based approach für $PS \mid temp, \bar{d} \mid WET$

- Einführung**
- B&B-Verfahren
 - Zul. Bereich
 - relaxation-based approach
 - tree-based approach

- Auflösung von Ressourcenkonflikten durch Einführung von Ordnungselementen unabh. von ZF
- Jedoch:



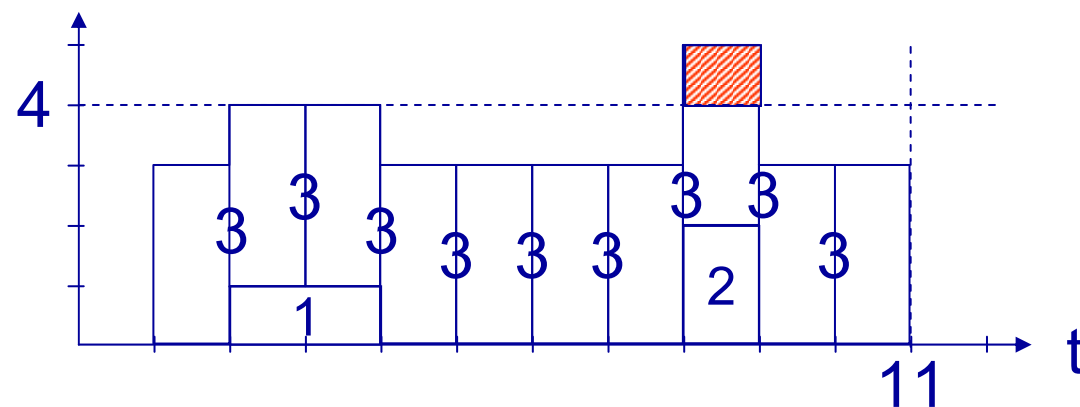
ZF = RAC

$c_k^+ = c_k^- = 1$

$|\mathcal{R}| = 1$

$R_1 = 4$

$r_k(S,t)$



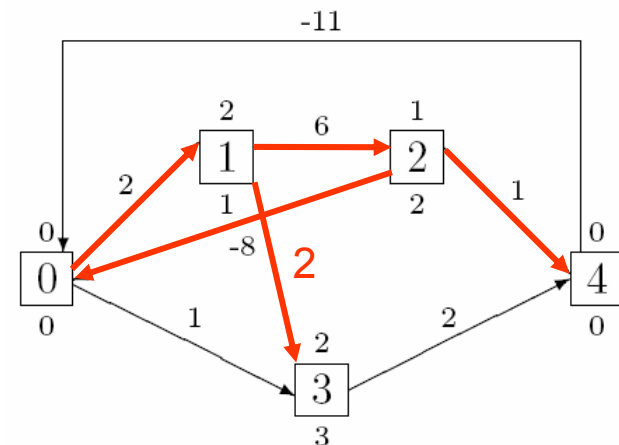
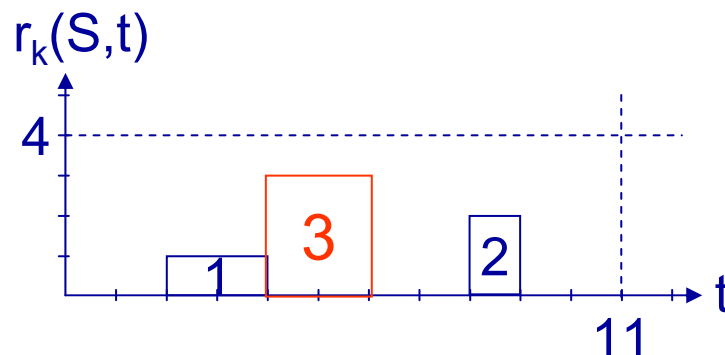
t	f(S)
1	12
2	12
3	12
4	10
5	12
6	8
7	./.
8	./.
9	8

➔ „Gute“ Lösungen ↔ Zeit-/Ordnungs-NB bindend

Einführung

- B&B-Verfahren
- Zul. Bereich
- relaxation-based approach
- tree-based approach

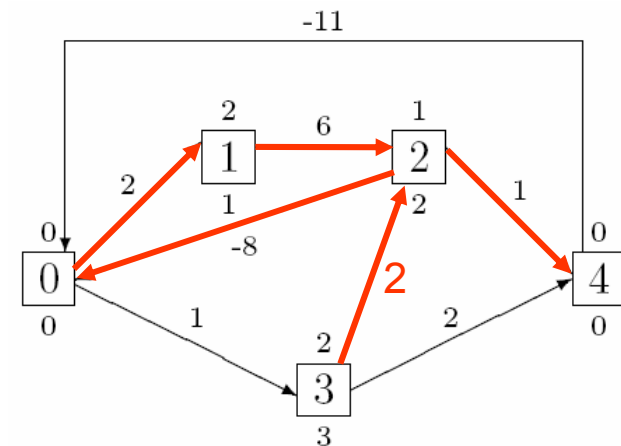
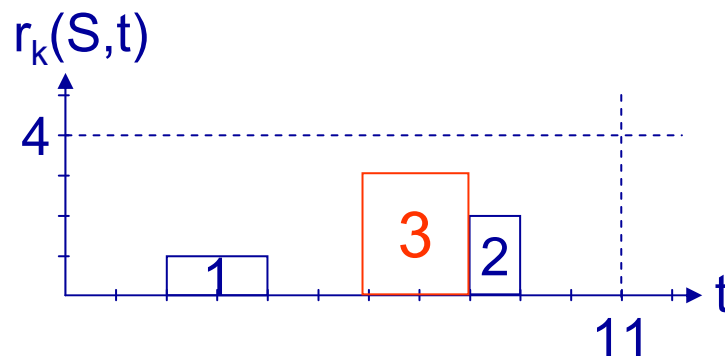
- Jedem Kandidaten für eine opt. Lsg. kann (mind.) ein **spanning tree** (Gerüst) T in $N(O(S))$ für mind. ein $S \in \mathcal{S}$ zugeordnet werden wie folgt:
- $(i, j) \in T \Rightarrow$ NB $S_j - S_i \geq \delta_{ij}$ ist bindend, d.h. es gilt $S_j - S_i = \delta_{ij}$
- Beispiel:



Einführung

- B&B-Verfahren
- Zul. Bereich
- relaxation-based approach
- tree-based approach

- Jedem Kandidaten für eine opt. Lsg. kann (mind.) ein **spanning tree** (Gerüst) T in $N(O(S))$ für mind. ein $S \in \mathcal{S}$ zugeordnet werden wie folgt:
- $(i, j) \in T \Rightarrow$ NB $S_j - S_i \geq \delta_{ij}$ ist bindend, d.h. es gilt $S_j - S_i = \delta_{ij}$
- Beispiel:



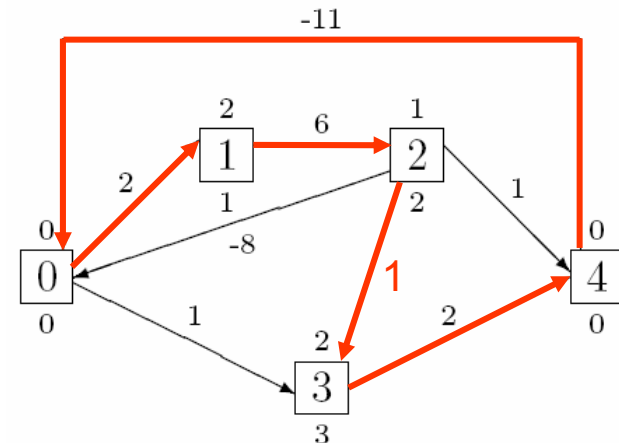
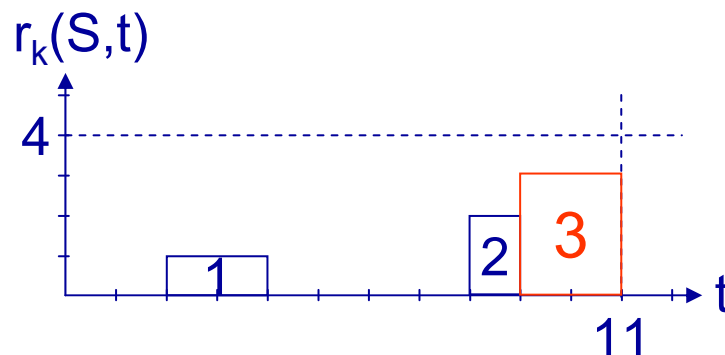
Einführung

- B&B-Verfahren
- Zul. Bereich
- relaxation-based approach
- tree-based approach

- Jedem Kandidaten für eine opt. Lsg. kann (mind.) ein **spanning tree** (Gerüst) T in $N(O(S))$ für mind. ein $S \in \mathcal{S}$ zugeordnet werden wie folgt:

$(i, j) \in T \Rightarrow$ NB $S_j - S_i \geq \delta_{ij}$ ist bindend,
d.h. es gilt $S_j - S_i = \delta_{ij}$

- Beispiel:



Einführung

- B&B-Verfahren
- Zul. Bereich
- relaxation-based approach
- tree-based

- Idee:
 - Starte mit „leerem“ spanning tree
 - Erweitere gegebenen spanning tree um
 - entweder einen Pfeil aus N
 - oder um einen Pfeil, der einen Ordnungselement entspricht,
 - Schließe dabei Ressourcen zu einem minimalen Resource spannung-tre
 - Falls spanning tree alle Vorgänge umfasst
→ potentielles Optimum
- Themen im SW-Praktikum: Eine Gruppe
 - Implementierung eines (truncated) B&B-Verfahrens basierend auf dem tree-based approach für $PS \mid temp, \bar{d} \mid RAC$

Einführung zus. NB =
Erweiterung um Pfeile

Relaxation: spanning
tree umfasst zunächst
nicht alle Vorgänge

- 22.11.:
Metaheuristiken (Tabu Search, Simulated Annealing) + zugehörige Nachbarschaften
- 29.11.:
Konsistenztests + untere Schranken
Gruppenvergabe!