Universität Karlsruhe
Institut für Wirtschaftstheorie
und Operations Research
Prof. Dr. Klaus Neumann
Dipl.-Math. Steffen Hagmayer

Wintersemester 2004/2005
25.November 2004

Übungen zur Vorlesung "Einführung in das Operations Research I"
Blatt 5

Aufgabe 20

Dualisieren Sie folgende lineare Optimierungsprobleme:

a) $\begin{array}{ll} \text{Min} & c^T x \\ \text{u.d.N.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \text{Max} & c^T x \\ \text{u.d.N.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$

c) $\begin{array}{ll} \text{Max} & c^T x \\ \text{u.d.N.} & Ax \geq b \end{array}$

Aufgabe 21

Gegeben sei folgendes Transportproblem:

Ein Gut werde von verschiedenen Firmen (Angebotsorten) zu verschiedenen Verbrauchern (Bedarfsorten) transportiert. Es gebe m Firmen und n Verbraucher. Das zu transportierende Gut sei bei der Firma F_i in $a_i > 0$ Mengeneinheiten vorhanden ($i = 1, \ldots, m$), und der Verbraucher V_j benötige $b_j > 0$ Mengeneinheiten dieses Gutes ($j = 1, \ldots, n$). Die Transportkosten von F_i zu V_j betragen $c_{ij} \geq 0$ ($i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$) Geldeinheiten (GE) je Mengeneinheit (ME).

Es werde angenommen, dass die insgesamt produzierte und verbrauchte Menge des Gutes übereinstimmen, jede Firma ihre Produktion verkauft und jeder Verbraucher seinen Bedarf decken kann.
a) Formulieren Sie das Transportproblem als lineares Optimierungsproblem.
b) Formen Sie das Transportproblem in die Standardform (L) um.
c) Dualisieren Sie das Transportproblem.
d) Wie ist das Transportproblem zu formulieren, wenn Sie die Annahme, dass die produzierten Mengen mit den verbrauchten Mengen übereinstimmen, relaxieren?

Aufgabe 22

Bestimmen Sie das zu (P) duale Problem.

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{Max} & c_1^T x^1 + c_2^T x^2 \\ \text{u.d.N.} & A_1 x^1 \geq b^1 \\ & A_2 x^2 = b^2 \\ & x^1 \in \mathbb{R}^p, x^2 \in \mathbb{R}^q_+ \end{array}$$

Aufgabe 23

Bestimmen Sie zu folgendem linearen Optimierungsproblem das duale Problem:

$$\begin{array}{lr} \text{Min} & 7x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{u.d.N.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 17 \\ & -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 20 \\ & x_1 + x_3 = 10 \\ & x_1 \geq x_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Aufgabe 24

Ein Fabrikant stelle von n Produkten jeweils $x_1, \ldots, x_n$ Einheiten aus den m Rohstoffen $R_1, \ldots, R_m$ her. Der Koeffizient a_{ij} gebe an, wieviel Mengeneinheiten vom i-ten Rohstoff R_i zur Produktion einer Einheit des j-ten Produkts benötigt werden. Die Rohstoffreserven seien knapp. Vom Rohstoff R_i stehe nur die Menge b_i zur Verfügung und g_j bezeichne den Gewinn, den der Unternehmer bei der Produktion einer Einheit des j-ten Produkts erzielt.

a) Formulieren Sie ein lineares Optimierungsproblem, das die Produktionsmengen bestimmt, bei denen der Gewinn maximiert wird.

b) Der Unternehmer überlegt sich, ob er die Rohstoffe verkaufen soll, anstatt sie zu verarbeiten. Allerdings will er nur verkaufen, falls er auf dem Markt Materialpreise erzielen kann, bei denen der Verkaufserlöß der Rohstoffe mindestens den Gewinn für die Fertigwaren ausmacht. Wir bezeichnen mit $y_1, \ldots, y_m$ die zu bestimmenden Preise. Wenn der Fabrikant das j-te Gut nicht herstellt, so beträgt der Verkaufserlöß des i-ten Rohstoffs pro Einheit des j-ten Produkts $a_{ij}y_i$.

Formulieren Sie ein lineares Optimierungsproblem, das den Mindestgewinn bestimmt, den der Unternehmer unter diesen Bestimmungen für die Rohstoffe erzielen kann.

c) Zeigen Sie:
Ist der Gewinn beim Verkauf der Rohstoffe für das j-te Produkt größer als der Gewinn beim Verkauf des Fertigprodukts, so kann es nicht optimal sein, Produkt j zu produzieren.

d) Zeigen Sie:
Wird Produkt j produziert, so darf durch den Verkauf der Rohstoffe nicht mehr Gewinn erzielt werden als beim Verkauf der Fertigwaren.

Dieses Übungsblatt wird in den Tutorien vom 29.11.2004 bis 03.12.2004 besprochen.