Algorithmus für das bipartite Kardinalitäts-Matching-Problem

Gegeben sei der bipartite Graph $G = [R, S, E]$ und ein Matching X in G, z. B. $X = \emptyset$.

Schritt 1 (Markierung):

(1.0) Markiere jeden ungesättigten Knoten von R mit ,,0“.
(1.1) Sind alle Markierungen ,,untersucht“ worden, so gehe zu Schritt 3.
Andernfalls finde einen Knoten i mit nicht untersuchter Markierung.
Falls $i \in R$, gehe zu (1.2); falls $i \in S$, gehe zu (1.3).
(1.2) Untersuche die Marke des Knotens $i \in R$ wie folgt:
Für jede Kante $[i, j] \notin X$ (die mit i inzident ist), markiere den Knoten j mit ,,i“, falls j nicht schon markiert ist.
Gehe zu (1.1).
(1.3) Untersuche die Marke des Knotens $i \in S$ wie folgt:
Ist Knoten i ungesättigt, gehe zu Schritt 2.
Andernfalls identifiziere die einzige Kante $[k, i] \in X$, die mit i inzident ist, und markiere den Knoten k mit ,,i“. Gehe zu (1.1).

Schritt 2 (Matching-Vergrößerung):

Eine matching-vergrößernde Kette K ist gefunden worden mit dem in (1.3) identifizierten ungesättigten Endknoten i.
Die übrigen Knoten von K werden ,,rückwärts“ identifiziert: Hat Knoten i die Marke ,,k“, so ist k der ,,vorletzte“ Knoten von K. Hat k die Marke ,,j“, so ist j der ,,drittletzte“ Knoten von K etc. Der ,,erste“ Knoten von K hat die Marke ,,0“. ,,Vergrößere“ das Matching X, indem zu X alle Kanten von K hinzugefügt werden, die nicht zu X gehören, und aus X diejenigen Kanten von K eliminiert werden, die zu X gehören. Das neue Matching werde wieder mit X bezeichnet.
Entferne alle Knotenmarkierungen. Gehe zu Schritt 1.

Schritt 3:

Die Markierung ist ,,ungarisch“, es existiert keine matching-vergrößernde Kette, und das Matching X hat maximale Kardinalität.
Sei $L \subseteq R \cup S$ die Menge der markierten Knoten. Dann ist $U := (R \setminus L) \cup (S \cap L)$ eine minimale Knoten-Überdeckung von G.

Zeitkomplexität des Algorithmus: $O(m^2 n)$ mit $|R| = m, |S| = n, m \leq n$