

## Branch-and-Cut-Algorithmus für die ganzzahlige Optimierung

- Schritt 1** Lege die Klasse  $K$  der im Algorithmus verwendeten starken gültigen Ungleichungen fest.
- Schritt 2** Wähle ein Anfangspolyeder  $Q$ , z.B.  $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ .
- Schritt 3** Bestimme eine optimale Lösung  $\bar{x}$  von "Min.  $c^T x$  u.d.N.  $x \in Q$ ", etwa mit dem Simplexverfahren.
- Schritt 4** Ist  $\bar{x}$  ganzzahlig, so ist  $\bar{x}$  optimale Lösung von (G). Terminiere.
- Schritt 5** Finde von  $\bar{x}$  verletzte Ungleichungen der Klasse  $K$ , etwa  $\alpha^k x \leq \beta_k$  ( $k \in \mathcal{K}$ ), setze  $Q := Q \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^k x \leq \beta_k$  ( $k \in \mathcal{K}$ )}, und gehe zu Schritt 3.
- Schritt 6** Falls keine verletzte Ungleichung aus  $K$  gefunden wird, löse das Problem "Min.  $c^T x$  u.d.N.  $x \in Q \cap Z^n$ " mit Hilfe des Branch-and-Bound-Verfahrens.

## Branch-and-Cut-Algorithmus für das Knotenpackungsproblem (P)

- Schritt 1 (LP-Relaxation)**  
 Bestimme eine optimale Lösung  $\bar{x}$  der LP-Relaxation von (P).  
 Ist  $\bar{x}$  ganzzahlig, so ist  $\bar{x}$  optimale Lösung von (P). Terminiere.  
 Reduziere (P) durch Fixieren von Variablen  $x_j$  mit ganzzahligen Werten  $\bar{x}_j$ . Das reduzierte Problem sei wieder mit (P) bezeichnet.
- Schritt 2 (Erzeugung von Cliques)**  
 Erzeuge Cliques des zu (P) gehörigen Graphen  $G$ , so daß für jede Kante von  $G$  beide Endknoten zu (mindestens) einer dieser Cliques gehören.
- Schritt 3 (LP-Relaxation der Cliques-Version von (P))**  
 Bestimme optimale Lösung  $\bar{x}$  der LP-Relaxation (LCP) der Cliques-Version (CP) von (P).  
 Ist  $\bar{x}$  ganzzahlig, so ist  $\bar{x}$  optimale Lösung von (P). Terminiere.  
 Bestimme aus  $\bar{x}$  eine (ganzzahlige) zulässige Lösung von (P) und speichere die bisher beste zulässige Lösung  $x^*$  von (P) sowie  $B := F(x^*)$ .
- Schritt 4 (Fixierung von Variablen)**  
 Gilt für einen zur optimalen Lösung  $\bar{x}$  von (LCP) gehörigen reduzierten Zielfunktionskoeffizienten  $\zeta_j$ :  $F(\bar{x}) - B \leq -\zeta_j$ , so setze in (P)  $x_j := 0$ .  
 Das reduzierte Problem sei wieder mit (P) bezeichnet.  
 Werden weniger als 10% der Variablen auf diese Weise fixiert, so gehe zu Schritt 5, andernfalls zu Schritt 1.

## Schritt 5 (Zusätzliche Cliques-Ungleichungen)

- Bestimme eine von  $\bar{x}$  verletzte Cliques-Ungleichung und füge sie zu (CP) hinzu. Das erweiterte Problem sei wieder mit (CP) bezeichnet.  
 Findet man keine verletzte Cliques-Ungleichung, dann gehe zu Schritt 6, andernfalls zu Schritt 3.

## Schritt 6 (Branch-and-Bound-Verfahren)

- 6.1 Die Wurzel  $r$  des Suchbaumes entspreche dem zu (CP) gehörigen Knotenpackungsproblem (P). Setze  $L_r := \{r\}$  und  $b(r) := F(\bar{x})$ .
- 6.2 Ist  $L_s = \emptyset$ , so ist  $x^*$  optimale Lösung von (P). Terminiere.  
 Wähle mit der GUB-Strategie ein  $s \in L_s$  und entferne  $s$  aus  $L_s$ .
- 6.3 Gilt  $b(s) - B < 1$ , dann ist  $x^*$  optimale Lösung von (P). Terminiere.  
 Gilt  $b(s) - B \geq 1$  und ist  $\bar{x}(s)$  ganzzahlig, so setze  $x^* := \bar{x}(s)$  und  $B := F(x^*)$  und gehe zu 6.2.
- Gilt  $b(s) - B \geq 1$  und ist  $\bar{x}(s)$  nicht ganzzahlig, dann erzeuge durch Null- bzw. Eins-Setzen einer noch nicht fixierten Variablen zwei Nachfolger von  $s$  und füge diese Nachfolger zu  $L_s$  und zum Suchbaum hinzu. Für jeden der beiden Nachfolger  $v$  von  $s$  bzw. das zugehörige Knotenpackungsproblem (P(v)) bestimme optimale Lösung  $\bar{x}(v)$  der (evtl. mehrfach reduzierten) LP-Relaxation von (P(v)). Gehe hierzu zu Schritt 1 (mit (P(v)) statt P) und durchlaufe wie oben die weiteren Schritte 2 bis 5 so lange, bis sich in Schritt 5 keine verletzte Cliques-Ungleichung mehr findet.  
 Setze  $b(v) := F(\bar{x}(v))$ .  
 Gehe zu 6.2.

## Bestimmung einer Menge von Cliques C(1), C(2), ...

mit der Eigenschaft, daß jede Kante aus  $E$  in dem durch genau eine dieser Cliques induzierten vollständigen Teilgraphen von  $G = [V, E]$  liegt.

- $v := 0$ .  
 Solange  $E \neq \emptyset$   
 Wähle  $k \in V$ , so daß  $\delta(k) = \max_{i \in V} \delta(i)$  mit  $\delta(i) = |N(i)|$ .  
 $v := v + 1$ .  
 $C(v) := \{k\}$ ,  $U := N(k)$ .  
 Solange  $U \neq \emptyset$   
 Wähle  $j \in U$ , so daß  $\delta(j) = \max_{i \in U} \delta(i)$ .  
 $C(v) := C(v) \cup \{j\}$ ,  $U := U \cap N(i)$ .  
 $E := E \setminus \{\{i, j\} \mid i, j \in C(v), i \neq j\}$   
 $V := V \setminus C(v)$  setze  $N(i) := N(i) \setminus C(v)$  (Clique  $C(v)$  wird aus dem Graphen eliminiert).