Algorithmus 6

(Optimale AGE-Vergrößerung eines gemischten Multigraphen *G*)

Schritt 1
Jeder Kante $e \in E$ wird eine der beiden möglichen Richtungen zugewiesen; der resultierende Pfeil sei $\vec{e}$. $\hat{G}$ sei der resultierende Multigraph.

Bestimme $a_i := \hat{\delta}^-(i) - \hat{\delta}^+(i) = \delta^\times(i) - 2\hat{\delta}^+(i)$ für alle Knoten *i* in $\hat{G}$.

Schritt 2
Für jedes $e \in E$ werden zwei Pfeile $\bar{e}$ und $\bar{e}'$ angeführt, die beide die dem Pfeil $\vec{e}$ entgegengesetzte Orientierung haben. $\vec{G}$ sei der resultierende Multidigraph.

Die Transportkosten *k* pro Mengeneinheit und die (Maximal-)Kapazitäten κ für die Pfeile von $\vec{G}$ ("Multinetzwerk") werden wie folgt festgelegt:

$k(e) := c(e),\ \kappa(e) := \infty$ für die "alten Pfeile" $e \in A$,

$k(\vec{e}) := k(\bar{e}) := c(e),\ k(\bar{e}') := 0,\ \kappa(\vec{e}) := \kappa(\bar{e}) := \infty,\ \kappa(\bar{e}') := 2$ für die statt der ursprünglichen Kanten $e \in E$ angeführten "neuen" Pfeile $\vec{e}$, $\bar{e}$ und $\bar{e}'$.

Schritt 3
Seien $\vec{E}$ die Pfeilmenge von $\vec{G}$, $x(e)$ die auf $e \in \vec{E}$ transportierte Menge und E_i^+ (bzw. E_i^-) die Menge der von dem Knoten *i* ausgehenden (bzw. in den Knoten *i* einmündenden) Pfeile von $\vec{G}$.

Bestimme eine optimale Lösung $\left\{ x^*(e) \,\middle|\, e \in \vec{E} \right\}$ des folgenden Umladeproblems im Multinetzwerk $\vec{G}$ mit Kapazitäten und Kosten:

$$
\begin{aligned}
\text{Min.} \quad & \sum_{e \in \vec{E}} k(e)\, x(e) \\
\text{u.d.N.} \quad & \sum_{e \in E_i^+} x(e) - \sum_{e \in E_i^-} x(e) = a_i \quad (i \in V) \\
& \left.\begin{aligned} x(e) &\le \kappa(e) \\ x(e) &\in \mathbf{Z}_+ \end{aligned}\right\} (e \in \vec{E})
\end{aligned}
$$

Schritt 4
Eine optimale AGE-Vergrößerung $\tilde{G}$ von G erhält man wie folgt:

(a) Für $e \in A$ werden $x^*(e)$ zum Pfeil e parallele Pfeile (jeweils mit der Bewertung $c(e)$) zu G hinzugefügt.

(b) Für $e \in E$ sind drei Fälle möglich:

(i) $x^*(\overleftarrow{e}') = 0$ (und folglich $x^*(\overleftarrow{e}) = 0$):
Die Kante e wird durch den Pfeil $\vec{e}$ ersetzt (mit der Bewertung $c(e)$).

(ii) $x^*(\overleftarrow{e}') = 2$ (und folglich $x^*(\vec{e}) = 0$):
Die Kante e wird durch den Pfeil $\overleftarrow{e}$ ersetzt (mit der Bewertung $c(e)$).

(iii) $x^*(\overleftarrow{e}') = 1$ (und folglich $x^*(\overleftarrow{e}) = x^*(\vec{e}) = 0$):
Die Kante e bleibt ungeändert.

Ferner sind im Fall (i) $x^*(\vec{e})$ zum Pfeil $\vec{e}$ parallele Pfeile und im Fall (ii) $x^*(\overleftarrow{e})$ zum Pfeil $\overleftarrow{e}$ parallele Pfeile (jeweils mit der Bewertung $c(e)$) zu G hinzuzufügen.

❑